ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ THÚY HOA

XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TUYẾN TÍNH MỘT CHIỀU

THÁI NGUYÊN - 6/2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ THÚY HOA

XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TUYẾN TÍNH MỘT CHIỀU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN THỊ NGỌC OANH

THÁI NGUYÊN - 6/2020

Mục lục

Trang

Danh sách hình vẽ

Lời nói đầu

Điều kiện ban đầu có rất nhiều ý nghĩa khi nghiên cứu các mô hình thực tiễn trong khí tượng, thủy văn, địa chất, hải dương học, lý thuyết dự báo,... [1, 2, 3]. Bởi vì, khi có điều kiện ban đầu, ta có thể đưa ra các dự báo về sự tiến hóa tiếp theo của mô hình. Tuy nhiên, trong thực tế không phải lúc nào điều kiện ban đầu cũng được biết, vấn đề đặt ra ở đây là từ một số quan sát về nghiệm ta tìm lại điều kiện ban đầu này. Các quan sát về nghiệm rất đa dạng [6, 7] như quan sát tại thời điểm cuối, quan sát tích phân, quan sát điểm, quan sát biên hay một phần của biên,.... Trong luận văn này, chúng tôi tập trung nghiên cứu bài toán xác định điều kiện ban đầu từ quan sát về nghiệm tại thời điểm cuối cho phương trình truyền nhiệt một chiều. Cụ thể, cho $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$, kí hiệu $Q = \Omega \times [0, T]$ với $T > 0$ cho trước và $S = \partial\Omega \times [0, T]$. Cho các hàm $a(x, t), b(x, t) \in L^2(Q)$. Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + bu = f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = v(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Bài toán đặt ra ở đây là từ thông tin ta quan sát được về nghiệm tại thời điểm cuối $Cu = u(x, T) = z(x)$ xác định lại điều kiện ban đầu $v(x)$.

Bài toán xác định điều kiện ban đầu là bài toán khó vì có tính *đặt không chỉnh* rất cao. Một bài toán được gọi là *đặt chỉnh theo nghĩa Hadamard* nếu thỏa mãn tất cả các điều kiện: i) Tồn tại nghiệm; ii) Nghiệm là duy nhất; iii) Nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ kiện bài toán. Nếu ít nhất một trong các điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán được gọi là đặt không chỉnh. Bài toán đặt không chỉnh thường gây ra nhiều vấn đề nghiêm trọng vì làm cho các nghiệm số cổ điển không ổn định, tức là một sai số nhỏ trong dữ kiện đầu vào có thể dẫn tới sai số lớn bất kì với nghiệm. Ta có thể xét ví dụ sau đây: Xét phương trình truyền nhiệt một chiều với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất sau đây

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x \in (0,\pi),\ 0 \le t \le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \tag{0.3}$$

$$u(x,0) = v(x) \in L^2(0,\pi). \tag{0.4}$$

Vấn đề đặt ra ở đây là ta đi tìm lại điều kiện ban đầu v từ thông tin $u(x,1) = \xi(x)$. Sử dụng khai triển Fourier cho v, ta có biểu diễn sau đây

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \varphi_n(x),\ x \in [0,\pi] \tag{0.5}$$

với $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ và $v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi v(\tau)\sin(n\tau)d\tau$.

Từ đó ta có

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-n^2 t} \varphi_n(x).$$

Do đó nếu $\xi \in L^2(0,\pi)$, thì

$$\xi(x) = u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-n^2} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(x)$$

với $\xi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi \xi(\tau)\sin(n\tau)d\tau$.

Do vậy,

$$v_n = \xi_n e^{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

và

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} \xi_n \sin(nx). \tag{0.6}$$

Với $v \in L^2(0,\pi)$, ta phải có

$$\|v\|^2_{L^2(0,\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2} |\xi_n|^2 < \infty. \tag{0.7}$$

Từ (0.6) và (0.7), ta thấy rằng bài toán xây dựng lại điều kiện ban đầu v từ ξ là rất đặt không chỉnh: Trước tiên, nghiệm v chỉ tồn tại với những hàm ξ mà hệ số Fourier ξ_n giảm nhanh khi n tiến tới ∞ (nhanh hơn e^{-n^2}). Thứ hai, một sai số nhỏ của hệ số Fourier thứ n sẽ được nhân lên với e^{n^2}. Ví dụ nếu có sai số 10^{-8} trong hệ số Fourier thứ ξ_5 của dữ liệu ξ sẽ sinh ra sai số 10^3 trong điều kiện ban đầu v.

Nội dung luận văn được trình bày trong 2 chương:

Chương 1 giới thiệu một số kiến thức chuẩn bị, nguồn gốc phương trình truyền nhiệt, phương trình truyền nhiệt một chiều dạng tổng quát, bài toán thuận, phương pháp sai phân hữu hạn rời rạc bài toán thuận bằng cách sử dụng lược đồ sai phân Crank-Nicolson.

Chương 2 nghiên cứu bài toán xác định điều kiện ban đầu bằng cách sử dụng phương pháp biến phân kết hợp với hiệu chỉnh Tikhonov, công thức gradient của phiếm hàm mục tiêu được tính thông qua nghiệm của bài toán liên hợp cả trong trường hợp liên tục (Định lý 2.1) và trong trường hợp rời rạc (Định lý 2.2). Trong chương này, chúng tôi cũng trình bày lại phương pháp gradient liên hợp để tìm cực tiểu phiếm hàm mục tiêu.

Bên cạnh việc chứng minh một số kết quả lý thuyết cho bài toán, để nghiên cứu bài toán dạng rời rạc, luận văn sử dụng phương pháp sai phân rời rạc hóa bài toán thuận, bài toán biến phân được giải bằng phương pháp lặp gradient liên hợp. Một số thử nghiệm số cũng được trình bày trong luận văn nhằm minh họa cho tính hữu hiệu của các thuật toán đề xuất.

Quá trình thực hiện luận văn tốt nghiệp thạc sĩ là giai đoạn quan trọng nhất trong quãng đời mỗi học viên. Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ là tiền đề nhằm trang bị cho chúng em những kỹ năng nghiên cứu, những kiến thức quý báu trên con đường giảng dạy của mình.

Trước hết, chúng em xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đặc biệt là các Thầy, Cô trong

Khoa Toán - Tin đã tận tình chỉ dạy và trang bị cho em những kiến thức cần thiết trong suốt thời gian ngồi trên ghế giảng đường, làm nền tảng cho em có thể hoàn thành được bài luận văn này.

Em xin trân trọng cảm ơn cô Nguyễn Thị Ngọc Oanh đã trực tiếp hướng dẫn, giúp đỡ em trong quá trình thực hiện đề tài.

Và cuối cùng, xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè, tập thể lớp K12A6, những người luôn sẵn sàng sẻ chia và giúp đỡ trong học tập và cuộc sống. Mong rằng, chúng ta sẽ mãi mãi gắn bó với nhau.

Một lần nữa em xin gửi đến thầy cô, bạn bè lời cảm ơn chân thành và tốt đẹp nhất!

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 6 năm 2020

Học viên

Nguyễn Thị Thúy Hoa

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản liên quan tới phương trình truyền nhiệt một chiều như nguồn gốc phương trình truyền nhiệt, bài toán thuận, một số không gian hàm cơ bản, định nghĩa nghiệm yếu và phương pháp sai phân rời rạc bài toán thông qua lược đồ Crank-Nicolson.

1.1. Nguồn gốc phương trình truyền nhiệt

Phương trình truyền nhiệt đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, được mô tả bởi sự phân bố nhiệt (hay biến thiên nhiệt độ) trong miền cho trước theo thời gian. Nhiệt năng (hay còn gọi là nhiệt) là quá trình trao đổi năng lượng giữa hai điểm có nhiệt độ khác nhau. Năng lượng nhiệt được tính theo công thức

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u, \tag{1.1}$$

trong đó $\boldsymbol{q}$ là lượng nhiệt truyền tải trên một đơn vị thời gian qua một đơn vị thể tích, hằng số dương k được gọi là *hệ số truyền dẫn* và ∇u là gradient của nhiệt độ u. Trong trường hợp một chiều, phương trình (1.1) trở thành

$$q = -ku_x,$$

trong đó $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Trong một số nghiên cứu, sự thay đổi ΔQ của năng lượng bên trong vật chất liên quan tới sự thay đổi Δu của nhiệt độ thông qua công thức

$$\Delta Q = c\rho\Delta u$$

trong đó các hằng số $c > 0, \rho > 0$ tương ứng là nhiệt dung riêng và mật độ khối lượng của vật chất. Nếu chọn nhiệt độ ban đầu bằng 0 ta có

$$Q = c\rho u. \tag{1.2}$$

Ta sẽ cụ thể hóa phương trình (1.1) và (1.2) như sau: Ký hiệu (x, t) tương ứng là các tọa độ không gian và thời gian. Xét hình chữ nhật

$$R = \{(\xi, \tau) : x - \Delta x \le \xi \le x + \Delta x \text{ và } t - \Delta t \le \tau \le t + \Delta t\}.$$

Khi đó, nhiệt độ thay đổi trong khoảng thời gian $2\Delta t$ trong miền $2\Delta x$ được tính như sau

$$c\rho \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \{u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t - \Delta t)\} d\xi = c\rho \iint_R \frac{\partial u}{\partial \tau} d\xi d\tau.$$

Năng lượng trên biên được cho bởi

$$k \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x - \Delta x, \tau)\} d\tau = k \iint_R \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} d\xi d\tau.$$

Theo Định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$\iint_R (c\rho u_\tau - k u_{\xi\xi}) d\xi d\tau = 0$$

với mọi khoảng Δx và Δt. Do vậy, ta nhận được

$$c\rho u_t - k u_{xx} = 0$$

hay

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0$$

với $\kappa = c^{-1}\rho^{-1}k$. Sử dụng công thức đổi biến $\tau = \kappa t$ và gán lại τ thành t ta nhận được phương trình truyền nhiệt dạng cổ điển như sau

$$\mathcal{L}u = u_{xx} - u_t = 0. \tag{1.3}$$